

Q モールの応力円、クーロンの強度式、モール・クーロンの破壊基準は何を示しているのでしょうか。

A モールの応力円は、ある三次元の物体内部の任意の面に作用する垂直応力とせん断応力の関係を方程式で表したときに、得られる円の方程式の円を言います。
 クーロンの強度式は、ある三次元の物体内部の任意面の破壊時に作用する垂直応力とせん断応力の関係を方程式で表したときに、得られる直線式の直線を言います。
 モール・クーロンの破壊基準は、縦軸にせん断応力、横軸に垂直応力を取り、そのグラフ上にモールの応力円とクーロンの強度式を描きます。その両者の接点における座標（せん断応力と垂直応力）がその物質の破壊時の応力を表します。

(1) モールの応力円

ある三次元の物体に外部から作用する最大主応力を σ_1 、中間主応力を σ_2 、最小主応力を σ_3 とします。物体内部のある面に注目すると、その面には垂直応力 σ とせん断応力 τ が作用しています(図-1)。これは、外部からの応力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 により発生するものです。したがって σ と τ の大きさは σ_1 、 σ_2 、 σ_3 の大きさから計算できます。 σ と τ の大きさを知ることは、物体の破壊条件を理解するために必要です。

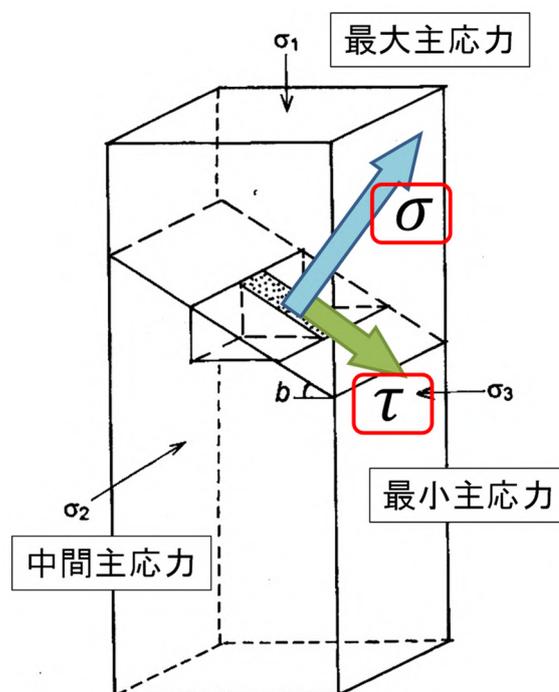


図-1 物体に作用する応力¹⁾に加筆

岩石外部からの応力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 と、それにより岩石内部のある面に作用する応力 σ と τ との関係は、以下の式により表されます。

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

この式は、横軸に σ を、縦軸に τ を取った場合、点 $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)$ の円を表します。この円をモールの応力円と呼びます(図-2)。

モールの応力円上の点 C の座標を読むと、その時点のある面に作用する σ と τ の大きさが分かります。b は、ある面と最小主応力 σ_3 との角度を表し、 $0 < b < 90^\circ$ です。したがって、b を変化させることにより、物体内部の任意の面を設定できます。

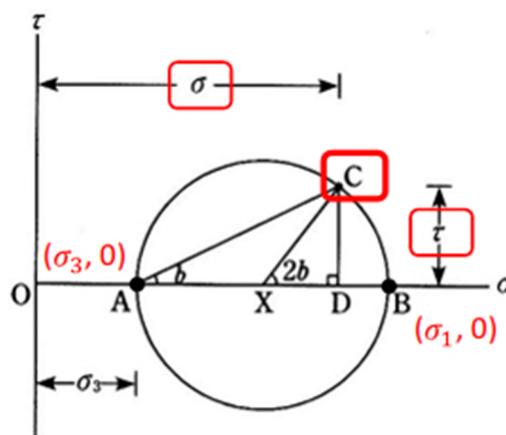


図-2 モールの応力円¹⁾に加筆

(2) クーロンの強度式

図-1 の、物体内部のある面に作用する垂直応力 σ とせん断応力 τ は、 σ_1 および σ_3 と共に方程式で表され、それはモールの応力円と呼ばれます。これは、破壊前の物体内部の応力状態を表現します。

破壊時にある面に作用する σ と τ の大きさは、土や岩石を用いた力学試験の結果から、直線で表されることが分かっています。図-3 は、物体をせん断変形させた際、破壊時にせん断面に生じた σ と τ の関係を表します。破壊時の σ と τ の組合せは無数にありますが、それらは全て同一の直線上にプロットされます。

$$\tau = \tan\phi \cdot \sigma + c$$

この直線をクーロンの強度式といいます。クーロンの強度式の切片 c をせん断強度(粘着力)、傾き ϕ を内部摩擦角といいます。クーロンの強度式は物質の種類等によって変化するので、 c および ϕ を測定し、対象物質の物性として評価します。

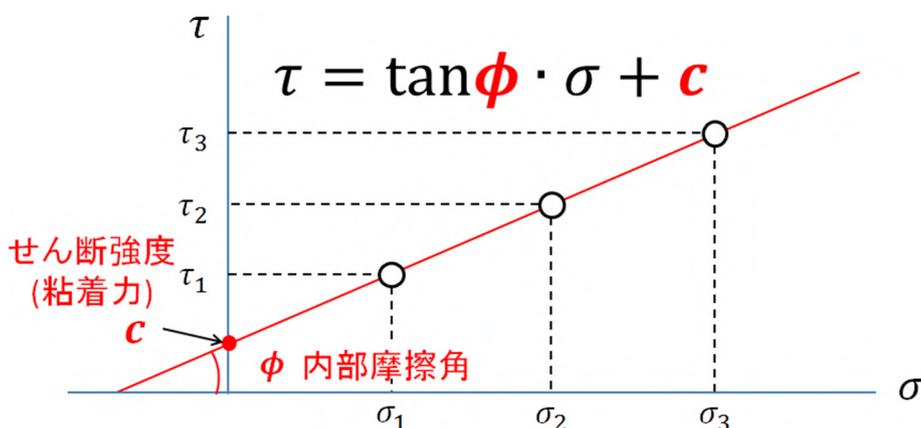


図-3 破壊時のある面に作用する σ と τ の関係

(3) モール・クーロンの強度式

最大主応力を σ_1 、中間主応力を σ_2 、最小主応力を σ_3 とするとき (図-1)、物体内部のある面に作用する垂直応力 σ_1 および σ_3 は方程式で表され、それはモールの応力円と呼ばれます。これは、破壊前の物体内部の応力状態を表現します。一方、破壊時にある面に作用する σ と τ の大きさは、土や岩石を用いた力学試験の結果から、直線で表されることが分かっています、クーロンの強度式と呼ばれます。

モールの応力円とクーロンの強度式はそれぞれ横軸に σ 、縦軸に τ をとるので、同一のグラフ上に表せます (図-4)。これは、ある物体に対する外力の変化前後のモールの応力円とクーロンの強度式との関係を表します。図-4 では、 σ_1 が増加しています。それに伴いモールの応力円は拡大しますが、クーロンの強度式は変化しません。クーロンの強度式は物質に固有の物性を表すので、外部からの応力によらず一定です。モールの応力円の大きさは、外部からの応力により変化します。 σ_1 の増加だけでなく、 σ_3 の減少によってもモールの応力円は大きくなります。

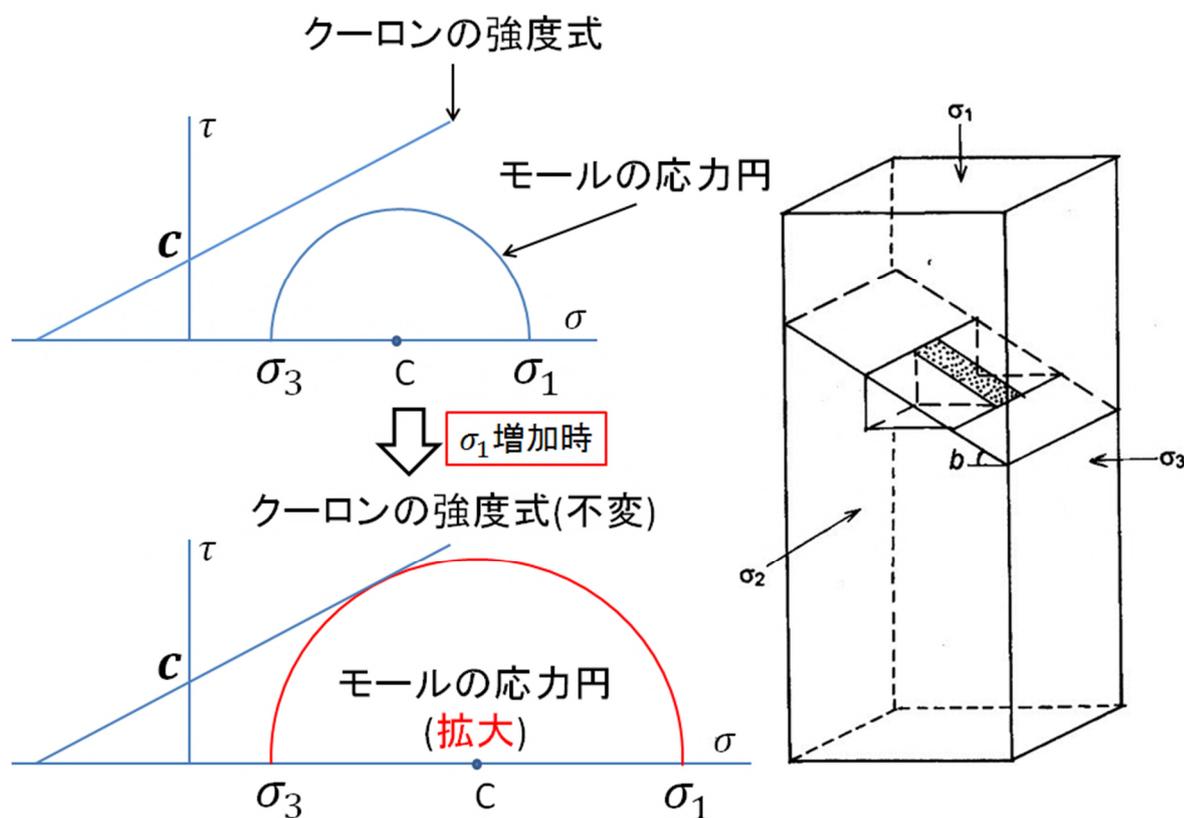


図-4 最大主応力 σ_1 増加時のクーロンの強度式とモールの応力円の関係の変化
¹⁾に加筆

図-4 では、モールの応力円とクーロンの強度式が接しています。両者が接するとき、物体は破壊します。この関係をモール・クーロンの破壊基準といい、両者の接点の座標は破壊面に作用する σ と τ の値を表します(図-5)。

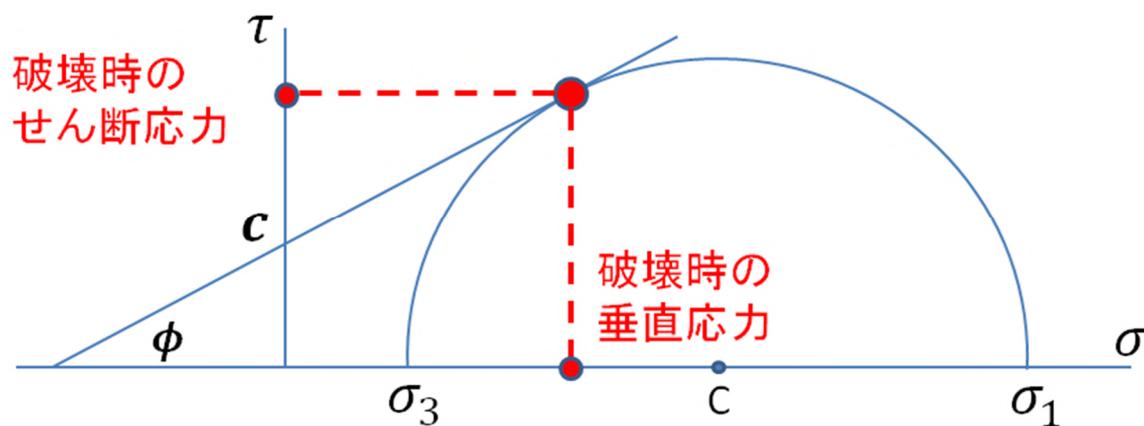


図-5 物体の破壊時のモールの応力円とクーロンの強度式の関係

【引用文献】

1) 松倉公憲 (2008) : 山崩れ・地すべりの力学-地形プロセス学入門, p. 14, 16.

(回答者 小暮 哲也)